

Fase final de la Copa Cangur a Catalunya

1a Copa Cangur internacional

1. Les encaixades

Es reuneixen dos grups de persones i cada persona d'un grup fa una encaixada de mans amb cada persona de l'altre grup. En total s'han fet 48 encaixades. Quin és el mínim nombre de persones que poden haver-se reunit?

2. L'esfera cau al forat

En una taula hi ha un forat circular de 12 cm de diàmetre. Una esfera de diàmetre 20 cm que hi havia sobre la taula ha caigut al forat. Si la taula té una altura de 90 cm, quina és la distància del punt més alt de l'esfera al terra?

3. Les boles

En una bossa hi ha moltes boles; n'hi ha de 10 colors diferents. Quin és el mínim nombre de boles que hem de treure de la bossa, sense mirar, per poder assegurar que en el conjunt de boles que hem tret n'hi ha 50 o més del mateix color?

4. Anem sumant

El Sr. Cangur va fent sumes de nombres imparells consecutius. Comença amb la suma $17 + 19$, després calcula $17 + 19 + 21$ i així successivament. En un cert moment s'adona que el resultat de la suma $17 + 19 + 21 + \dots + k$ és exactament $k + 1700$. Quin és el valor de k ?

5. Quants zeros?

En quants zeros acaba el nombre $24^4 \times 75^3 \times 15^5$?

6. Amb dues xifres

Quants nombres entre 10.000 i 99.999 hi ha (ambdós inclosos) que es puguin escriure fent servir en cadascun d'ells un màxim de dues xifres diferents?

7. Un eneàgon

Les mesures en graus dels angles interiors d'un polígon de 9 costats són 9 nombres enters positius consecutius. Quina és la mesura en graus del més petit d'aquests angles?

8. Pintem vèrtexs

Volem pintar els vèrtexs d'un hexàgon $ABCDEF$ fent servir com a màxim 4 colors i de manera que els colors de dos vèrtexs contigus no poden coincidir. Quants acoloriments diferents existeixen?

Nota: dos acoloriments es consideren diferents si el color d'un dels vèrtexs en un acoloriment és diferent del color d'aquest mateix vèrtex en un altre acoloriment.

9. Polígons encaixats

En Joan dibuixa un triangle equilàter i el cercle que passa pels tres vèrtexs del triangle. Després dibuixa el quadrat circumscrit a aquest cercle i el cercle que passa pels quatre vèrtexs del quadrat. Fet això, el full de paper on en Joan fa el seu dibuix ha quedat dividit en 13 regions diferents. Tot seguit en Joan dibuixa un pentàgon circumscrit al darrer cercle i el cercle que passa pels cinc vèrtexs del pentàgon i continua la construcció amb successius polígons regulars cada vegada amb un costat més i els cercles que passen pels respectius vèrtexs. Quin és el nombre de costats del darrer polígon que ha dibuixat en Joan quan, per primera vegada, el full de paper queda dividit en 2014 regions o més?

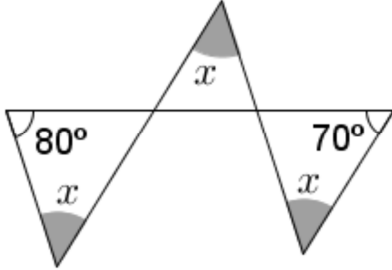
10. Una desigualtat

Amb el símbol $|t|$ indiquem el valor absolut de t .

Quants nombres enters compleixen la condició $|2014 - |x|| < 100$?

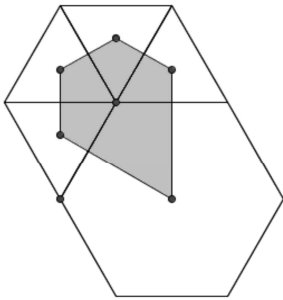
11. L'angle desconegut

Quina és la mesura de l'angle x en el dibuix?



12. El pentàgon

En la figura podeu veure un hexàgon regular i quatre triangles equilàters. Prenent com a vèrtexs els centres d'aquests cinc polígons regulars hem dibuixat un pentàgon (ombrejat a la figura). Si l'àrea de l'hexàgon regular és de 72 unitats d'àrea, quina és l'àrea del pentàgon?



13. Cinc enters diferents

Si a, b, c, d i e són enters, tots diferents, i es compleix $(5-a)(5-b)(5-c)(5-d)(5-e)=18$, quant és $a+b+c+d+e$?

14. Un múltiple de 84

Per quants nombres enters, a , compresos entre 1 i 25 el producte $a(a+1)(a+2)$ és múltiple de 84?

15. Quatre rectangles

Els quatre rectangles ombrats en la figura són iguals i amb un costat doble que l'altre. Si el cercle té radi 10, quina és l'àrea de cada rectangle?

