

Fase final de la 2a Copa Cangur a Catalunya

2^a Copa Cangur internacional

1. En un polígon regular de 11 costats es tracen les dues diagonals que van d'un vèrtex als dos vèrtexs que determinen el costat oposat. Si expressem el nombre de graus de l'angle que formen aquestes diagonals com una fracció irreductible, quant sumen el numerador i el denominador d'aquesta fracció?

2. Diem que un nombre "es complementa" si és igual al producte dels nombres que complementen les seves xifres fins a 10. Per exemple, 163 no es complementa perquè $(10 - 1) \cdot (10 - 6) \cdot (10 - 3) = 9 \cdot 4 \cdot 7 = 252$ que no és 163. En canvi, el 50 es complementa perquè $(10 - 5) \cdot (10 - 0) = 50$, i també es complementen els nombres 500, 5000, etc. Trobeu l'únic nombre de tres xifres que no acaba en zero i que es complementa.

3. La suma de cinc nombres A, B, C, D, E (que estan ordenats de més petit a més gran) és 157908. Cada nombre està format amb les xifres 1, 2, 3, 4 i 5 (una vegada cada xifra), i els 4 ja estan posats. Trobeu les quatre últimes xifres del nombre D .

$$\begin{array}{r}
 A \qquad \qquad \qquad * * 4 * * \\
 + B \qquad \qquad \qquad + * * * * 4 \\
 + C \qquad \qquad \qquad + * * * 4 * \\
 + D \qquad \qquad \qquad + 4 * * * * \\
 + E \qquad \qquad \qquad + * 4 * * * \\
 \hline
 157908 \qquad \qquad \qquad 157908
 \end{array}$$

4. Per tal que no em prenguin la bicicleta, l'he lligat amb un cademat que s'obre amb una combinació numèrica. La combinació consta de tres xifres diferents en ordre decreixent lligides d'esquerra a dreta. El producte d'aquestes tres xifres és un nombre senar, i la seva suma un quadrat perfecte. Quina és la combinació de xifres que obre el cademat?

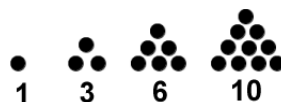
5. Amb un cert nombre de cubs de $1 \times 1 \times 1$ hem construït un cuboide (prisma de sis cares rectangulars que té tots els angles rectes) on en cada aresta hi ha més d'un cub. L'Albert treu del cuboide 77 cubs, que són tots els que formen una cara. Del cuboide que queda, la Joana en treu també tots els cubs d'una cara, que són 63. Quants cubs formaven el cuboide inicial?

6. L'any 1995 es diu "redundant" perquè té la propietat que es pot escriure d'aquesta manera: $1995=57 \cdot 5 \cdot 7$. Quin serà el proper any redundat, és a dir amb la propietat que es pot escriure de la forma $AB \cdot A \cdot B$? (AB representa un nombre de dues xifres A i B)

7. Quina és l'última xifra del nombre $2^{2015} + 0^{2015} + 1^{2015} + 5^{2015}$?

8. Si el "pes" d'un nombre es defineix com la suma de les seves xifres, quines són les primeres quatre xifres (començant per l'esquerra) del nombre més petit que pesa 2015?

9. Els primers nombres triangulars són l'1, el 3, el 6 i el 10.

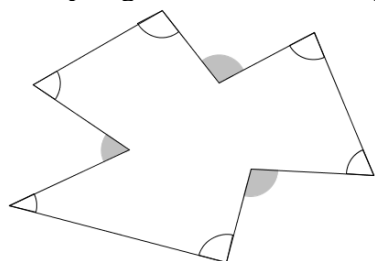


El 55 i el 66 també són nombres triangulars. Quin és el primer nombre triangular que s'escriu amb tres xifres iguals?

10. A partir d'un paper quadriculat, seguint les línies de la quadrícula s'ha retallat un rectangle. En Joan tria un dels quatre costats del rectangle i pinta tots els quadradets que toquen aquest costat que ha triat. La Berta pinta després tots els quadradets que toquen al perímetre del rectangle que no han estat pintats per en Joan i li diu "mira, jo he pintat el doble de quadradets que tu". En Joan comenta "doncs, mira, encara en queden sense pintar el doble dels que has pintat tu". Quants quadradets té el rectangle inicial?

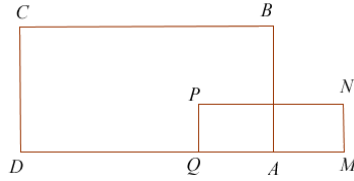
11. Tenim quatre cartes amb els nombres 2, 5, 7 i 12, un en cada carta. A l'altra cara de les cartes hi ha escrits els següents textos: "divisible per 7", "primer", "imparell" i "més gran que 100" (cadascun en una carta). Si sabem que en cap de les cartes el text descriu una propietat del nombre que hi ha a l'altra cara, quin nombre hi ha a la carta que diu "més gran que 100"?

12. En el polígon còncau de la figura

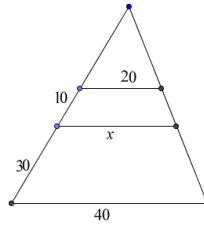


sabem que la suma dels sis angles interiors que son convexos (els que estan marcats) és de 440° . Quant és la suma dels tres angles exteriors ombrejats?

13. En la figura, els rectangles $ABCD$ i $MNPQ$ són semblants i tenen els costats paral·lels. A és el punt mitjà de QM . Si $DQ = 4 \cdot QA$ i l'àrea del rectangle $MNPQ$ és 4, quant fa l'àrea del rectangle $ABCD$?



14. A la figura coneixes les longituds de quatre segments, que són 10, 20, 30 i 40, i els costats que mesuren 20, x i 40 són paral·lels. Determina la longitud del segment indicat amb la x .



15. L'Albert té dues bosses de boles. Els nombres que indiquen la quantitat de boles que hi ha a cadascuna de les bosses són primers entre ells, és a dir no tenen cap divisor comú excepte l'1. L'Albert juga a un joc on cada vegada que perd ha de treure de la bossa que té més boles el nombre de boles que en aquell moment hi ha a l'altra bossa (la que en té menys). Si a les dues n'hi ha la mateixa quantitat, en buida una de les dues. Després de la tretzena vegada que ha jugat, l'Albert no ha guanyat cap partida i ha de plegar perquè una de les seves bosses s'ha quedat sense boles. Quin és el nombre màxim de boles que l'Albert podia tenir a l'inici de la partida?